Второй турнир памяти А.Б. Воронецкого.

Второй тур. Лига А.

1. Решите в натуральных числах уравнение $k^m + m^n = k^n + 1$.

2. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число n числом n-1 или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске число 1. В начале игры на доске написано число 1000000. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнер?

3. Квадратные трехчлены f и g с целыми коэффициентами принимают только положительные значения и $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \sqrt{2}$ при всех вещественных x. Докажите, что $\frac{f(x)}{g(x)} > \sqrt{2}$ при всех вещественных x.

4. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D – середина стороны AB. Известно, что угол AID – прямой. Докажите равенство $AB+BC=3AC$.

5. Шестизначное число, делящееся на 9, умножили на 111111. Докажите, что десятичная запись произведения содержит хотя бы одну девятку.

6. Пусть u – вещественное число, $0 < u < 1$. Определим $f(x)$ следующим образом: $f(x)=0$, если $0 \leq x \leq u$, $f(x) = 1 - \left(\sqrt{ux} + \sqrt{(1-u)(1-x)}\right)^2$, если $u \leq x \leq 1$. Докажите, что в последовательности x, $f(x)$, $f(f(x))$, …, $f(f(\ldots f(x)\ldots))$ обязательно встретится 0.

7. Рассмотрим множество всех квадратных таблиц $p \times p$ клеток ($p>1$), заполненных натуральными числами 1, 2, ..., p^2. Пусть A – подмножество, в котором каждую таблицу можно получить из правильной операциями перестановки столбцов и перестановки строк (правильной называется таблица, в которой в первой строке (столбце) стоят по порядку числа 1, 2, ..., p, во второй строке (столбце) – p+1, p+2, ..., 2p, и так далее); B – подмножество, в котором из любой таблицы можно получить таблицу с равными числами операциями прибавления числа 1 ко всем числам строки или столбца. Докажите, что если $A=B$, то p – простое.

8. Сторона BC треугольника ABC разбита точками M и N на три равные части ($BM=MN=NC$); K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Прямая LM пересекает прямую AB в точке E, прямая KN пересекает прямую AC в точке F. Докажите, что прямая EF параллельна прямой BC.

Второй турнир памяти А.Б. Воронецкого.

Второй тур. Лига Б.

1. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z такие, что $xyz = 170170$ и $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

2. На доске написано натуральное число. Два игрока ходят по очереди, и каждый своим ходом заменяет написанное на доске число n числом n-1 или $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть). Выигрывает тот, кто первым напишет на доске число 1. В начале игры на доске написано число 1000000. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнер?

3. Квадратные трехчлены f и g с целыми коэффициентами принимают только положительные значения и $\frac{f(x)}{g(x)} \geq \sqrt{2}$ при всех вещественных x. Докажите, что $\frac{f(x)}{g(x)} > \sqrt{2}$ при всех вещественных x.

4. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D – середина стороны AB. Известно, что угол AID прямой. Докажите равенство $AB+BC=3AC$.

5. Шестизначное число, делящееся на 9, умножили на 111111. Докажите, что десятичная запись произведения содержит хотя бы одну девятку.

6. Точка D – середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. Точка E – основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Установите, какой из отрезков BF или BE длиннее.

7. Числа a_1, a_2, …, a_{16} расставлены по кругу. При этом сумма любых трех стоящих подряд чисел не меньше 2, а сумма любых пяти стоящих подряд чисел не превосходит 4. Какое наибольшее значение может принимать разность $a_1 – a_2$?

8. Клетки черно-белой доски 12×12 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается взять любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их:черные клетки – в зеленый цвет, зеленые – в белый, белые – в черный. Какое наименьшее число таких операций потребуется, чтобы получить «противоположную» бело-черную шахматную раскраску?