# Второй турнир памяти А.Б. Воронецкого.

## Первый тур. Лига А.

1. Натуральные числа $u$ и $v$ таковы, что для любого натурального $k$ числа $ku$+2 и $kv$+3 имеют общий натуральный делитель, больший 1.Чему может быть равно отношение $u/v$?

2. В треугольнике $ABC$ выполняется равенство $BC = 2AC$. На стороне $BC$ выбрана такая точка $D$, что $\angle CAD = \angle CBA$. Прямая $AD$ пересекает биссектрису внешнего угла $C$ в точке $E$. Докажите, что $AE = AB$.

3. В некотором государстве 2001 город, причем любые два города соединены прямым рейсом автобуса или поезда. Пользуясь только одним из этих двух видов транспорта, невозможно объехать 16 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно. Докажите, что, пользуясь только одним видом транспорта, невозможно объехать 17 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно.

4. Из таблицы 20×20 вырезали прямоугольники 1×20, 1×19, … 1×1. Докажите, что из оставшейся части таблицы можно вырезать еще 80 прямоугольников 1×2.

5. Для любых натуральных чисел $n>m$ докажите неравенство $[m,n]+[m+1,n+1]>2m\sqrt{n}$ , где $[x, y]$ – наименьшее общее кратное чисел $x$ и $y$.

6. Точка $I$ – центр окружности, вписанной в остроугольный треугольник $ABC$, а точка $H$ – ортоцентр этого треугольника. Точка $M$ – середина меньшей дуги $AC$ описанной окружности треугольника $ABC$. Оказалось, что $MI=MH$. Найдите угол $\angle ABC$.

7. $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трехчлены, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что трехчлен $f(x)+g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x)=g(x)^3$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.

8. Компьютер Пенек-III умеет выполнять с числом только одну операцию: он прибавляет 1, а затем в полученном числе переставляет все нули в конец, а остальные цифры – как угодно (например, из числа 1004 он может получить 1500 или 5100). В компьютер ввели число 12345, и после выполнения 400 операций на экране оказалось число 100000. Сколько раз за это время на экране компьютера появлялось число, оканчивающееся на нуль?

# Второй турнир памяти А.Б. Воронецкого.

## Первый тур. Лига Б.

1. Натуральные числа $u$ и $v$ таковы, что для любого натурального $k$ числа $ku+2$ и $kv+3$ имеют общий натуральный делитель, больший 1.Чему может быть равно отношение $u/v$?

2. В треугольнике $ABC$ выполняется равенство $BC = 2AC$. На стороне $BC$ выбрана такая точка $D$, что $\angle CAD = \angle CBA$. Прямая $AD$ пересекает биссектрису внешнего угла $C$ в точке $E$. Докажите, что $AE = AB$.

3. В некотором государстве 2001 город, причем любые два города соединены прямым рейсом автобуса или поезда. Пользуясь только одним из этих двух видов транспорта, невозможно объехать 16 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно. Докажите, что, пользуясь только одним видом транспорта, невозможно объехать 17 городов, побывав в каждом ровно один раз, и вернуться обратно.

4. $f(x)$ и $g(x)$ – квадратные трехчлены, старшие коэффициенты которых равны единице. Известно, что трехчлен $f(x)+g(x)$ имеет два различных корня, и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x)=g(x)^3$. Докажите, что трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.

5. Сумма положительных чисел $x$ и $y$ равна 1. Докажите, что $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) \geq 9$.

6. Точка $I$ – центр окружности, вписанной в остроугольный треугольник $ABC$, а точка $H$ – ортоцентр этого треугольника. Точка $M$ – середина меньшей дуги $AC$ описанной окружности треугольника $ABC$. Оказалось, что $MI=MH$. Найдите угол $\angle ABC$.

7. Назовем две клетки квадратной доски «друзьями», если они являются крайними клетками в некотором прямоугольнике $1\times4$. Можно ли доску $100\times100$ разрезать на пары клеток-«друзей»?

8. Компьютер Пенек-III умеет выполнять с числом только одну операцию: он прибавляет 1, а затем в полученном числе переставляет все нули в конец, а остальные цифры – как угодно (например, из числа 1004 он может получить 1500 или 5100). В компьютер ввели число 12345, и после выполнения 400 операций на экране оказалось число 100000. Сколько раз за это время на экране компьютера появлялось число, оканчивающееся на нуль?