II Турнир памяти А.Б. Воронецкого

Командная олимпиада. 8 ноября 2001 г.

1. Найдите наименьшее пятизначное число, делящееся на 71 без остатка, все цифры которого различны.

2. В лавке можно обменять шило на мыло, или 3 мыла на 1 шило, или 1 мыло на 4 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у Сережи оказалось столько же шила и мыла, сколько было вначале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 16.

3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр к стороне AB в точке X, серединный перпендикуляр стороны AC – в точке Y, а описанную окружность треугольника – в точке Z. (Точки A, X, Y, Z лежат на биссектрисе в порядке перечисления.) Докажите, что $AX=YZ$.

4. Можно ли бумажный прямоугольник размера 103×49 разрезать по клеточкам на несколько прямоугольников, каждый из которых имеет размеры 7×9, 7×14 или 9×14?

5. Квадратный лист $ABCD$ перегнули по прямой так, что вершина D попала в точку D_1 на стороне BC, а сторона AD перешла в отрезок A_1D_1, пересекающий сторону AB в точке E. Докажите, что полупериметр треугольника BED_1 равен стороне квадрата.

6. Среди всех «слов», составленных из 2001 буквы A и B, выберем содержащие комбинацию букв $ABABAB$. Докажите, что количество выбранных слов четно.

7. Дано простое число p. Найдите все натуральные k такие, что k^2-pk – точный квадрат.

8. Рассмотрим наборы вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (где $n \geq 2$) такие, что $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq 0$ и $(x_1)^2+(x_2)^2+\ldots+(x_n)^2 = 1$. Докажите, что наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не меньше, чем $\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.