

II Турнир памяти А.Б. Воронцового

Командная олимпиада. 8 ноября 2001 г.

1. Найдите наименьшее пятизначное число, делящееся на 71 без остатка, все цифры которого различны.
2. В лавке можно обменять шило на мыло, или 3 мыла на 1 шило, или 1 мыло на 4 шила (но не наоборот). После нескольких обменов у Сережи оказалось столько же шила и мыла, сколько было вначале. Докажите, что количество сделанных обменов делится на 16.
3. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр к стороне AB в точке X , серединный перпендикуляр стороны AC – в точке Y , а описанную окружность треугольника – в точке Z . (Точки A, X, Y, Z лежат на биссектрисе в порядке перечисления.) Докажите, что $AZ=YZ$.
4. Можно ли бумажный прямоугольник размера 103×49 разрезать по клеточкам на несколько прямоугольников, каждый из которых имеет размеры 7×9 , 7×14 или 9×14 ?
5. Квадратный лист $ABCD$ перегнули по прямой так, что вершина D попала в точку D_1 на стороне BC , а сторона AD перешла в отрезок A_1D_1 , пересекающий сторону AB в точке E . Докажите, что полупериметр треугольника BED_1 равен стороне квадрата.
6. Среди всех «слов», составленных из 2001 буквы A и B , выберем содержащие комбинацию букв $ABABAB$. Докажите, что количество выбранных слов четно.
7. Дано простое число p . Найдите все натуральные k такие, что $k^2 - pk$ – точный квадрат.
8. Рассмотрим наборы вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_n (где $n \geq 2$) такие, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 0$ и $(x_1)^2 + (x_2)^2 + \dots + (x_n)^2 = 1$. Докажите, что наибольшее из чисел x_1, x_2, \dots, x_n не меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.