ПЕРВЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ТУРНИР ПАМЯТИ А. Б. ВОРОНЕЦКОГО
Финал. Высшая лига. 10.11.2000

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E — середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

2. В клетчатом квадрате 8×8 закрашено 25 клеток, образующих квадрат 5×5. Разрешается выбрать любую клетку квадрата 8×8 и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

3. Существует ли 30-значное число такое, что любое число, образованное пятью его подряд стоящими цифрами делится на 13?

4. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных *собственных* делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны.

5. На клетчатой плоскости лежит 111 не перекрывающихся друг с другом трехклеточных уголков. При этом выполняется такое свойство: для любого из уголков содержащий его квадрат 2×2 целиком покрыт уголками. Докажите, что можно убрать один или несколько уголков (но не все) так, чтобы это свойство сохранилось.

6. На плоскости в вершинах правильного n-угольника сидят тараканы. Они одновременно начинают двигаться со скоростью v по сторонам многоугольника, каждый в сторону соседнего по часовой стрелке таракана, и продолжают двигаться равномерно и прямолинейно. По некоторой прямой на плоскости равномерно со скоростью v_1 движется энтомолог Вася. Через некоторое время оказалось, что Вася раздавил трех тараканов. Докажите, что $v = v_1$.

7. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P_1(x)$ степени $d \geq 2$. Пусть для любого натурального n $\quad P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x))$. Можно ли ряд натуральных чисел покрыть множествами значений многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x), \ldots$ в натуральных точках?

8. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа от 1 до 100 (каждое стоит ровно в одной клетке). Разрешается выбрать любую строку или столбец и домножить все числа, стоящие в выбранной строке (столбце), на произвольное положительное вещественное число. После нескольких таких операций в клетках квадрата опять оказались все числа от 1 до 100. Докажите, что хотя бы 10 из этих чисел оказались в исходных клетках.

ПЕРВЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ТУР*НИР ПАМЯТИ А. Б. ВОРОНЕЦКОГО
Первая лига. Матч за 3 место. 10.11.2000

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E — середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

2. В клетчатом квадрате 8×8 закрашено 25 клеток, образующих квадрат 5×5. Разрешается выбрать любую клетку квадрата 8×8 и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

3. Существует ли 30-значное число такое, что любое число, образованное пятью его подряд стоящими цифрами делится на 13?

4. Последовательности $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ заданы условиями $x_1 = \frac{1}{8}$, $y_1 = \frac{1}{10}$, $x_{n+1} = x_n + x_n^2$, $y_{n+1} = y_n + y_n^2$. Докажите, что числа x_m и y_n не равны ни при каких натуральных m и n.

5. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах с делениями можно упорядочить гири весом в 1, 3, 3^2, …, 3^{26} г? (Чашечные весы с делениями позволяют определять разность весов грузов, лежащих на чашках.)

6. Отрезки AM и BH — соответственно медиана и высота остроугольного треугольника ABC. Известно, что $AH = 1$ и $2\angle MAC = \angle MCA$. Найдите длину стороны BC.

7. Функция f задана при всех вещественных x и для любого x удовлетворяет неравенствам:
$$f(x+1) \leq f(2x+1) \quad \text{и} \quad f(3x+1) \geq f(6x+1)\,.$$
Известно, что $f(3) = 2$. Докажите, что уравнение $f(x) = 2$ имеет по крайней мере 2000 решений.

8. В клетках таблицы 9×9 расставлены натуральные числа от 1 до 81 (каждое стоит ровно в одной клетке). Вовочка несколько раз проделывал следующую операцию: выбирал положительное число и строку (или столбец) таблицы и домножал все числа, стоящие в выбранной строке (столбце), на это число. После нескольких таких операций в клетках квадрата опять оказались все числа от 1 до 81, причем каждое число поменялось местами с симметричным ему относительно главной диагонали. Докажите, что Вовочка допустил ошибку в вычислениях.

ПЕРВЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ТУРНИР ПАМЯТИ А. Б. ВОРОНЕЦКОГО

Финал. Первая лига. 10.11.2000

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E — середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

2. В клетчатом квадрате 8×8 закрашено 25 клеток, образующих квадрат 5×5. Разрешается выбрать любую клетку квадрата 8×8 и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

3. Существует ли 30-значное число такое, что любое число, образованное пятью его подряд стоящими цифрами делится на 13?

4. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных *собственных* делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны.

5. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах с делениями можно упорядочить гири весом в 1, 3, 3^2, …, 3^{26} г? (Чашечные весы с делениями позволяют определять разность весов грузов, лежащих на чашках.)

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На отрезке A_1C_1 выбрали точки A_2 и C_2 такие, что отрезок B_1A_2 делится высотой CC_1 пополам и пересекает высоту AA_1 в точке K, а отрезок B_1C_2 делится высотой AA_1 пополам и пересекает высоту CC_1 в точке L. Докажите, что $KL \parallel AC$.

7. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P_1(x)$ степени $d \geq 2$. Пусть для любого натурального n $\quad P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x))$. Можно ли ряд натуральных чисел покрыть множествами значений многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x), \ldots$ в натуральных точках?

8. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа от 1 до 100 (каждое стоит ровно в одной клетке). Разрешается выбрать любую строку или столбец и домножить все числа, стоящие в выбранной строке (столбце), на произвольное положительное вещественное число. После нескольких таких операций в клетках квадрата опять оказались все числа от 1 до 100. Докажите, что хотя бы 10 из этих чисел оказались в исходных клетках.

ПЕРВЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ТУРНИР ПАМЯТИ А. Б. ВОРОНЕЦКОГО

Высшая лига. Матч за 3 место. 10.11.2000

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На высоте AA_1 выбрана точка D такая, что $A_1D = C_1D$. Точка E — середина стороны AC. Докажите, что точки A, C_1, D и E лежат на одной окружности.

2. В клетчатом квадрате 8×8 закрашено 25 клеток, образующих квадрат 5×5. Разрешается выбрать любую клетку квадрата 8×8 и спросить, закрашена ли она. За какое наименьшее число таких вопросов можно наверняка определить, какие клетки закрашены?

3. Существует ли 30-значное число такое, что любое число, образованное пятью его подряд стоящими цифрами делится на 13?

4. Каждое из двух натуральных чисел равно сумме трех различных *собственных* делителей другого (собственным делителем числа называется отличный от него натуральный делитель). Докажите, что эти два числа равны.

5. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах с делениями можно упорядочить гири весом в 1, 3, 3^2, …, 3^{26} г? (Чашечные весы с делениями позволяют определять разность весов грузов, лежащих на чашках.)

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. На отрезке A_1C_1 выбрали точки A_2 и C_2 такие, что отрезок B_1A_2 делится высотой CC_1 пополам и пересекает высоту AA_1 в точке K, а отрезок B_1C_2 делится высотой AA_1 пополам и пересекает высоту CC_1 в точке L. Докажите, что $KL \parallel AC$.

7. Дан многочлен с целыми коэффициентами $P_1(x)$ степени $d \geq 2$. Пусть для любого натурального n $\quad P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x))$. Можно ли ряд натуральных чисел покрыть множествами значений многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x), \ldots$ в натуральных точках?

8. В клетках таблицы 10×10 расставлены натуральные числа от 1 до 100 (каждое стоит ровно в одной клетке). Разрешается выбрать любую строку или столбец и домножить все числа, стоящие в выбранной строке (столбце), на произвольное положительное вещественное число. После нескольких таких операций в клетках квадрата опять оказались все числа от 1 до 100. Докажите, что хотя бы 10 из этих чисел оказались в исходных клетках.