

ПЕРВЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ТУРНИР ПАМЯТИ А. Б ВОРОНЕЦКОГО
Математический бой №1. Высшая лига. 9.11.2000

1. Даны попарно взаимно простые натуральные числа x, y, z, t такие, что $xy + yz + zt = xt$. Докажите, что сумма квадратов каких-то двух из этих чисел вдвое больше суммы квадратов двух других.
2. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, M и N – середины сторон AD и BC соответственно. Точки A, B, M, N лежат на одной окружности. Прямая AB касается описанной окружности $\triangle BMC$. Докажите, что прямая AB также касается описанной окружности $\triangle AND$.
3. На плоскости отмечено 100 точек. Двое по очереди соединяют стрелочками пары точек (за ход проводится одна стрелка). Запрещается делать ход, после которого из любой точки можно будет попасть в любую другую по стрелочкам. Не имеющий хода проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
4. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?
5. Клетки квадрата 2000×2000 закрашивают по следующим правилам. В любой момент можно закрасить одиночную клетку, если ни одна из соседних с ней клеток еще не закрашена; или прямоугольник 1×2 , если к этому моменту уже закрашены ровно две из соседних с ним клеток; или квадрат 2×2 , если уже закрашены 8 соседних с ним клеток. (Соседними считаются клетки, примыкающие по стороне.) Можно ли закрасить весь квадрат?
6. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что $a^2 + b - 1$ делится на $b^2 + a - 1$. Докажите, что число $b^2 + a - 1$ имеет хотя бы два различных простых делителя.
7. Докажите, что для любых положительных чисел, удовлетворяющих условию $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, справедливо неравенство
$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-1}x_n}{x_1} + \frac{x_nx_1}{x_2} \geq x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$
8. Каждый месяц лесник Ермолай сажал вдоль забора ряд из 2000 деревьев. К каждому дереву он прибавлял табличку, на которой указывал сколько дубов есть среди самого дерева, его левого и правого соседей. Таким образом получалась последовательность из 2000 чисел. Сколько различных последовательностей мог получить лесник Ермолай?

ПЕРВЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ ТУРНИР ПАМЯТИ А. Б ВОРОНЕЦКОГО
Математический бой №1. Первая лига. 9.11.2000

1. Даны попарно взаимно простые натуральные числа x, y, z, t такие, что $xy + yz + zt = xt$. Докажите, что сумма квадратов каких-то двух из этих чисел равна сумме квадратов двух других.
2. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, M и N – середины сторон AD и BC соответственно. Точки A, B, M, N лежат на одной окружности. Прямая AB касается описанной окружности $\triangle BMC$. Докажите, что прямая AB также касается описанной окружности $\triangle AND$.
3. В стране 2000 городов, любые два города соединены двусторонней беспосадочной авиалинией. Когда-то все авиалинии были государственными. 1 января каждого года правительство выбирает 1999 государственных авиалиний и продает их частным авиакомпаниям. После этого 1 мая парламент выбирает один из городов и возвращает государству все частные авиалинии, выходящие из этого города. Докажите, что правительство может действовать так, чтобы к некоторому моменту более 99% авиалиний оказались частными.
4. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в любом порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?
5. В школе 40 кабинетов, которые открываются ключами 5 разных видов, причем количество ключей разных видов различно. Все 40 ключей оказались заперты в кабинетах, причем в каждом кабинете лежит один ключ, которым эту комнату нельзя открыть. Сторож Сергеев имеет дубликат ключа от одной из комнат. Докажите, что он сможет открыть все комнаты.
6. a и b – различные натуральные числа, большие 1, такие, что $a^2 + b - 1$ делится на $b^2 + a - 1$. Докажите, что число $b^2 + a - 1$ имеет хотя бы два различных простых делителя.
7. Числа a, b, c, d лежат в промежутке от 2 до 4. Докажите неравенство:

$$25(ab + cd)^2 \geq 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2).$$

8. Каждый месяц лесник Ермолай сажал вдоль забора ряд из 2001 деревьев. К каждому дереву он прибавлял табличку, на которой указывал сколько дубов есть среди самого дерева, его левого и правого соседей. Таким образом получалась последовательность из 2001 числа. Сколько различных последовательностей мог получить лесник Ермолай?