Командная олимпиада. 8.11.2000

1. a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + 8x + b$ и минимального значения трехчлена $g(x) = bx^2 + 8x + a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — прямой, E — точка пересечения диагоналей, точка F — проекция E на сторону AB. Докажите, что углы DFE и CFE равны.

3. Дима сложил из одинаковых кубиков прямоугольный параллелепипед (ребра кубиков равны 1), написал на бумажке числа 42, 48 и 82 и сказал, что это — объём, площадь поверхности и сумма длин всех ребер этого параллелепипеда, но не сказал, где какое число. Чему равны длины ребер диминого параллелепипеда?

4. На плоскости отмечена точка A. Требуется провести на плоскости несколько отрезков таким образом, чтобы любой луч, выходящий из точки A, пересекал не менее трех из них. Каким наименьшим числом отрезков можно обойтись?

5. Последовательность вещественных чисел x_1, x_2,… удовлетворяет равенству
$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}$$
при всех натуральных n. При этом $x_{2000} = x_1$. Докажите, что $x_{1999} \neq x_2$.

6. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 2000. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 7 или 8, а второй — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

7. Таблица $n \times n$ заполнена числами $0, +1, -1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одна $+1$ и ровно одна -1. Докажите, что некоторые строки и столбцы можно переставить так, чтобы на месте всех $+1$ оказались -1 и наоборот.

8. $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниями AD и BC. Некоторая окружность касается отрезков AB и AC и пересекает отрезок BC в точках M и N. Точки X и Y — ближайшие к D точки пересечения вписанной окружности треугольника BCD с прямыми DM и DN соответственно. Докажите, что прямая $XY \parallel AD$.

Командная олимпиада. 8.11.2000

1. a и b — положительные числа. Сумма минимального значения квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + 8x + b$ и минимального значения трехчлена $g(x) = bx^2 + 8x + a$ равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A — прямой, E — точка пересечения диагоналей, точка F — проекция E на сторону AB. Докажите, что углы DFE и CFE равны.

3. Дима сложил из одинаковых кубиков прямоугольный параллелепипед (ребра кубиков равны 1), написал на бумажке числа 42, 48 и 82 и сказал, что это — объём, площадь поверхности и сумма длин всех ребер этого параллелепипеда, но не сказал, где какое число. Чему равны длины ребер диминого параллелепипеда?

4. На плоскости отмечена точка A. Требуется провести на плоскости несколько отрезков таким образом, чтобы любой луч, выходящий из точки A, пересекал не менее трех из них. Каким наименьшим числом отрезков можно обойтись?

5. Последовательность вещественных чисел x_1, x_2,… удовлетворяет равенству
$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}$$
при всех натуральных n. При этом $x_{2000} = x_1$. Докажите, что $x_{1999} \neq x_2$.

6. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 2000. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 7 или 8, а второй — в противном случае. Кто выиграет при правильной игре?

7. Таблица $n \times n$ заполнена числами $0, +1, -1$ так, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно одна $+1$ и ровно одна -1. Докажите, что некоторые строки и столбцы можно переставить так, чтобы на месте всех $+1$ оказались -1 и наоборот.

8. $ABCD$ — равнобочная трапеция с основаниями AD и BC. Некоторая окружность касается отрезков AB и AC и пересекает отрезок BC в точках M и N. Точки X и Y — ближайшие к D точки пересечения вписанной окружности треугольника BCD с прямыми DM и DN соответственно. Докажите, что прямая $XY \parallel AD$.